



黒木玄 Gen Kuroki

@genkuroki

mathtod.online/@7shi/203900

四元数と3次元の回転の関係は「Lie群 $SU(2)$ の随伴表現」。

i, j, k を正規直交基底とする3次元Euclid空間に i, j, k 軸を中心とする角度 2θ の回転がそれぞれ

$$\begin{aligned} a &\mapsto e^{i\theta} a e^{-i\theta}, \\ a &\mapsto e^{j\theta} a e^{-j\theta}, \\ a &\mapsto e^{k\theta} a e^{-k\theta} \end{aligned}$$

で作用している。

Lie群 $SU(2)$ の四元数体 \mathbb{H} を使った実現の仕方は

$$SU(2) = \{ g \in \mathbb{H} \mid |g| = 1 \}.$$

このLie代数が

$$\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k.$$

$SU(2)$ の $\mathfrak{su}(2)$ への随伴表現の特殊化が上で示した式。

2017年05月31日 19:56 · Web · ↻ 2 · ★ 5 · Webで開く



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

複素数(実数と i から生成される)を実2次正方行列によって

$$i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と実現できることはよく知られている。四元数(実数と i, j から生成される)も次によって複素2次正方行列で実現できる:

$$\begin{aligned} i &\mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \\ j &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

すなわち複素数 z, w に対して

$$z + jw \mapsto \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}.$$

四元数はこの形の複素2次正方行列のことだと思ってよい。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

複素 n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})$ と書く。行列の積に関する群 $SU(n)$ は

$$SU(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* A = AA^* = E, |A| = 1 \}$$

と定義される。 $SU(2)$ については

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}.$$

この式から $SU(2)$ は絶対値が1の四元数全体のなす群と同一視できることや、 $SU(2)$ は3次元球面 $|z|^2 + |w|^2 = 1$ になっていることもわかります。

四元数、複素2次正方行列、3次元球面などなどの風景は基本的かつ様々に一般化されるので一度は見ておいて損がないです。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

行列群 $SU(n)$ のLie代数 $\mathfrak{su}(n)$ の定義はその単位元 E での接空間です。計算すると

$$\mathfrak{su}(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0, \text{tr } X = 0 \}.$$

接空間の定義を知らない人はこれを定義だと思ってよいです。そして $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ ならば

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{su}(n),$$

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! \in SU(n)$$

となることも容易に確認できます。 $\mathfrak{su}(2)$ が実数体上の次の基底を持つことも簡単な計算でわかります:

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

ゆえに $\mathfrak{su}(2)$ は純虚な四元数全体と同一視できる。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

I, J, K はPauli行列の $\pm i$ 倍になっています。だから、パウリ行列を扱うことは本質的に $\mathfrak{su}(2)$ を扱っていることになります。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

ここまででは行列で表現できるLie群とLie代数の典型例としての $SU(2)$ と $su(2)$ に関する説明です。

群やLie代数の話をしたら、その次にそれらの表現の話をしなければいけません。

Lie群とLie代数の一般論を性急にさせて勉強しようとせずに、行列の計算をきちんとやっておくことが大事なことだと思います。

何をやっているか理解できない一般論をやった後にそれを使って特殊な世界に降りて来ることに走るの、数学を理解できなくなるための有力な手段の一つだと思います。

特殊な場合を知って、残りは「以下同様」で理解できればものすごく効率が良くなります。

「一を聞いて、十を知る」という言葉がある。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

群 G の体 K 上のベクトル空間 V での表現とは群 G から V の可逆な一次変換全体のなす群への群の準同型写像のことです。群の表現とはざくっと言ってしまうと、群の元を一次変換で表現することです。

たとえば、 $SU(2)$ は複素 2×2 行列ですすでに実現されているので、自然に縦ベクトルの空間 \mathbb{C}^2 での表現を持ちます。これをよく $SU(2)$ のベクター表現と呼んだりします。

任意のLie群にはそのLie代数における随伴表現が定義されます。

$SU(n)$ の場合にその随伴表現は $g \in SU(n)$ に対して、 $su(n)$ の一次変換 Ad_g を $Ad_g X = gXg^{-1}$, $X \in su(n)$ と定めることによって定義されます。

$SU(2)$ の随伴表現は実3次元ベクトル空間 $su(2)$ での表現になります。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

$SU(2)$ の随伴表現は四元数を使った実現の方で見るとわかりやすいです。

$SU(2)$ の元 g は絶対値が1の四元数だと思えます。そのLie代数は純虚な四元数全体のなす3次元の実ベクトル空間と同一視できる。 $SU(2)$ の随伴表現は

$$ix + iy + kz \mapsto g(ix + iy + iz)g^{-1}$$

と書けます。

これが座標 (x, y, z) を持つ3次元実Euclid空間の回転を実現していることが単なる計算だけでチェックできるわけです。

$SU(2)$ は複素2次正方行列で実現できるので、行列の積によって縦ベクトルの空間 \mathbb{C}^2 におけるベクター表現を自明に持つのですが、それだけではなく、3次元実Euclid空間を回転させる表現も持っているわけです。

「 $SU(2)$ の表現を全部分類できないだろうか？」という問いに至れば表現論への入り口に立ったこととなります。

実ベクトル空間での表現は複素化して複素ベクトル空間における表現にしてしまっ、複素ベクトル空間における表現を分類する問題にしてしまった方が色々楽になります。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

$SU(2)$ の表現から $\mathfrak{su}(2)$ の表現が微分することによって得られ、逆に $\mathfrak{su}(2)$ の表現から $SU(2)$ の表現が \exp することによって得られます。だから、 $SU(2)$ の表現の分類と $\mathfrak{su}(2)$ の表現の分類は同じこととなります。 $\mathfrak{su}(2)$ の表現の話にしてしまうと、表現の分類が代数的に綺麗に整理できます。

すでに述べたように複素ベクトル空間での表現(複素表現)を分類する方が楽です。

その理由は、 $\mathfrak{su}(2)$ の複素表現は $\mathfrak{su}(2)$ の複素化の表現の複素表現と同一視でき、 $\mathfrak{su}(2)$ の複素化

$$\mathbb{C}I + \mathbb{C}J + \mathbb{C}K$$

と非常に扱い易いLie代数

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0 \}$$

が一致するからです。これも簡単な計算の話。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

どうして $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ が非常に扱い易いのか。

それは、所謂「昇降演算子」の方法をその表現論で利用可能だからです。既約表現のベクトルを「昇降演算子」の作用ですべて構成可能になる。

「昇降演算子」による計算で楽をしてうれしかった経験のある人であれば「なるほど、いつものあの方法が使えるのか！うれしい」と感じるようなことができるのです。

そのためには複素3次元のLie代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の基底を I, J, K から

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に置き換えることが必要になります。 E, F が「昇降演算子」の役目を果たします。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

E, F, H の基本関係式は

$$\begin{aligned}[H, E] &= 2E, \\ [H, F] &= -2F. \\ [E, F] &= H.\end{aligned}$$

重要なのはこの関係式で 2×2 行列での表現は重要ではありません。

$\lambda = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の $\lambda + 1$ 次元ベクトル空間 $L(\lambda)$ における表現を次のように構成できます。

・ $L(\lambda)$ は

$$v, Fv, F^2v, \dots, F^\lambda v$$

を基底に持つベクトル空間であるとする。

・ $Ev = 0, Hv = \lambda v, F^{\lambda+1}v = 0$ という関係式を課す。

・ E, F, H の $L(\lambda)$ への作用は E, F, H の基本関係式を用いて自然に定める。

$L(\lambda)$ たちは $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のすべての有限次元規約表現の同型類の代表元になっています。

有限次元規約表現の分類が完了した！



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

昇降演算子のアイデアが利用できるようにしたら、有限次元規約表現の分類が500文字で完了してしまっただけです！

同様のことが可能なLie代数のより広いクラスが、Kac-Moody代数です。Kac-Moody代数は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の一般化に過ぎないので、「Kac-Moody」のような聞き慣れない言葉が出て来てもびびる必要はありません。昇降演算子の話をより一般的にするだけです。

Kac-Moody代数は $\mathfrak{su}(n)$ の複素化 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ も含んでおり、任意の有限次元半単純Lie代数を含んでいます。そして、それだけではなく、無限次元のアフィンLie代数も含んでいるところがとてもうれしい。

Kac-Moody代数の表現論はアフィンLie代数のような無限次元Lie代数であっても、 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合と同様に昇降演算子のアイデアで表現達を分類できることを主張しています。

びびらず「以下同様」で行こう！



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

2×2 行列の計算をがんばって大量にした人が次にすべきことは、 3×3 行列の計算です。

$SU(3)$ のLie代数の複素化はトレースが 0 の複素3次正方行列全体のなす 8 次元の複素ベクトル空間になります(これも計算で解決できる)。

(i, j) 成分だけが 1 で他の成分が 0 の3次正方行列を E_{ij} と書くと、 $SU(3)$ のLie代数の複素化の基底として次が取れます。

$$\begin{aligned}
 H_1 &= E_{11} - E_{22}, \\
 H_2 &= E_{22} - E_{33}, \\
 E_{12}, \quad E_{23}, \quad E_{13}, \\
 E_{21}, \quad E_{32}, \quad E_{31}.
 \end{aligned}$$

これらは $sl_2(\mathbb{C})$ の場合の H, E, F の一般化になっています。 $SU(3)$ の随伴表現の複素化はこれらを基底に持つ8次元のベクトル空間での表現になります。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

$SU(3)$ の8次元表現を随伴表現としてさらっと構成しましたが、 $SU(3)$ の8次元表現はクオークの理論的発見に繋がるハドロンの「八道説」による分類の話そのものになっています。

ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A...

その辺の話はEdward Frenkelさんも数学ミステリー白熱教室第4回で説明していました。多分、表現論の話をするときには定番の話題だと思います。

twitter.com/genkuroki/status/6... mathtod.online/media/1jWq-ZQLE...
mathtod.online/media/NFGV9Vitl...

$E_{ij} = ((i,j) \text{成分だけが} 1 \text{で他の成分が} 0 \text{の} 3 \times 3 \text{行列})$
 $H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \quad (i=1,2)$
 $E_{12}, E_{23}, E_{13}, E_{21}, E_{32}, E_{31}, H_1, H_2$ の 8 つは



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

$SU(3)$ のLie代数の複素化 $sl_3(\mathbb{C})$ は以下を生成元に持ちます:

$$\begin{aligned}
 H_i &= E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \\
 E_i &= E_{i,i+1}, \\
 F_i &= E_{i+1,i}.
 \end{aligned}$$

ここで $i = 1, 2$ です。そして、それらは次を満たします:

$$\begin{aligned}
 [H_i, H_j] &= 0, \\
 [H_i, E_j] &= a_{ij} E_j, \\
 [H_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, \\
 [E_i, F_j] &= \delta_{ij} H_i, \\
 (\text{ad } E_i)^{1-a_{ij}} E_j &= 0 \quad (i \neq j), \\
 (\text{ad } F_i)^{1-a_{ij}} F_j &= 0 \quad (i \neq j).
 \end{aligned}$$

ここで

$$(\text{ad } A)B = [A, B],$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

この証明も単なる行列の易しい計算です。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

以上の計算をがんばってすることの御利益はKac-Moody代数の定義をすぐに理解できるようになることです。

一つ前の発言の行列 $[a_{ij}]$ を

- ・サイズは l とする。
- ・対角成分はすべて 2 であるとする。
- ・非対角成分は非負の整数で、 $i \neq j$ について $a_{ij} = 0$ と $a_{ji} = 0$ は同値であるとする。

と一般化しましょう。生成元 H_i, E_i, F_i ($i = 1, \dots, l$) と一つ前の発言に書いた形の関係式で定義されるLie代数が型 $[a_{ij}]$ のKac-Moody代数です。

「八道説」の $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ での随伴表現による解釈を知っていて、その関係式も実際に自分の手で計算してよく知っていれば、Kac-Moody代数の定義は典型的に「以下同様」のスタイルになっていることを理解できるわけです。

数学は基本的にこういうみもふたもない話なので、聞き慣れない数学用語に何か「権威」を感じている場合にはほぼ確実に誤解していることになると思います。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

$SU(2)$ から Kac-Moody に至る道に関する連続ツイートをPDF化しました。(汚い)LaTeXソースも全公開してあります。

PDF

github.com/genkuroki/SU2toKacM...

ソース

github.com/genkuroki/SU2toKacM...

これはもう完全にmathtodonで仕事をしている状態。他人のうちにお邪魔してそこで仕事をしている感じか。 😊



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

補足: $(\text{ad } A)B = [A, B] = AB - BA$ なので

$$(\text{ad } A)^2 B = [A, [A, B]]$$

です。これは

$$[A, [A, B]] = A^2 B - 2ABA + BA^2$$

とも書けます。

Kac-Moody代数の定義関係式の最も複雑な部分は

$$[A, [A, [\dots, [A, B] \dots]]] = 0$$

この形をしていて、Serre関係式と呼ばれています。交換子をしつこく繰り返すといつかは0になるという関係式。

このSerre関係式をパラメーター q を含む関係式に置き換えて、 $[E_i, F_i]$ の部分も少し変えらるとDrinfeld-Jimboの量子展開環の定義も得られます。

だから、量子展開環も「昇降演算子」のアイデアを一般化したものになっています。

こんな感じの話になっているので、量子群の勉強をしたい人にとっても、 $SU(n) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_i, E_i, F_i$ という経路の計算をしておくことは結構大事です。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

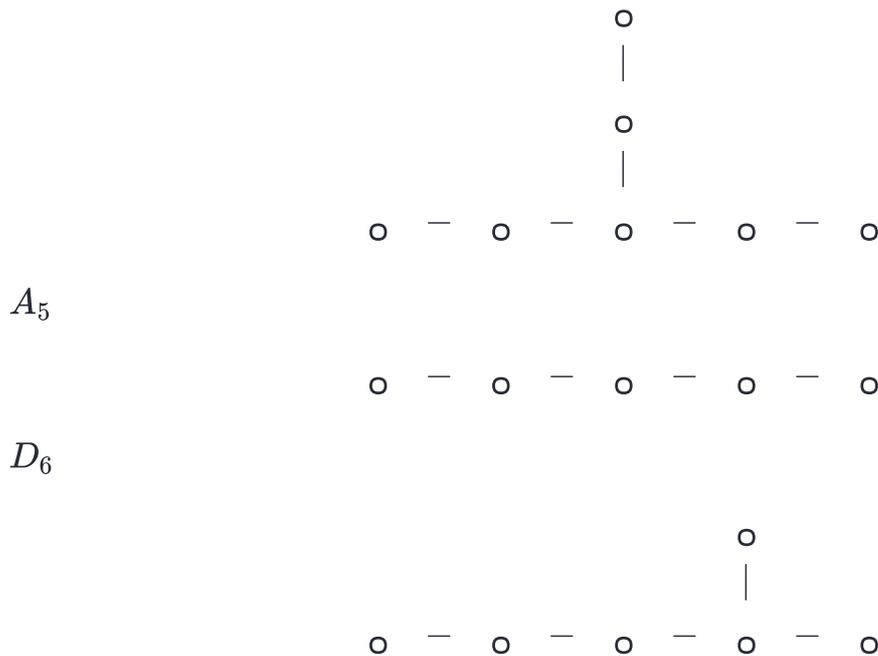
補足を追加して、
github.com/genkuroki/SU2toKacM...
 を更新しておいた。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

$E_6^{(1)}$



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

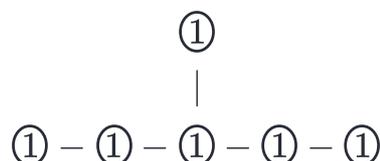
でかすぎるな。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

E_6



B_5

$$\textcircled{1} - \textcircled{1} - \textcircled{1} - \textcircled{1} = \textcircled{2}$$

 C_5

$$\textcircled{2} = \textcircled{2} = \textcircled{2} = \textcircled{2} = \textcircled{1}$$

丸の中の数は対称化に使われる場合の d_i で、線の本数は $-d_i a_{ij} = -d_j a_{ji}$ です。この描き方ならば任意の対称化可能GCMを図式化できます。

矢線にすれば任意の反対称化可能整数行列を図式化できて(籓の場合に対応)、mutationもその図式の言葉で説明できる。

math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTe...



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
Dynkin diagrams in my own style

on Jun 1

$$A_n: \textcircled{1} - \textcircled{1} - \dots - \textcircled{1}$$

$$B_n: \textcircled{1} - \dots - \textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$C_n: \textcircled{2} = \dots = \textcircled{2} = \textcircled{1}$$

$$D_n: \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \dots - \textcircled{1} - \textcircled{1} \end{array}$$

$$E_{6,7,8}: \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \dots - \textcircled{1} - \textcircled{1} - \textcircled{1} \end{array}$$

$$F_4: \textcircled{1} - \textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{2}$$

$$G_2: \textcircled{1} \equiv \textcircled{3}$$



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on Jun 1

affineの場合も描こうとすると、いきなり $A_{n-1}^{(1)}$ ではまる。ループをどうやって描いたらいいのか？



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
rank 2の有限型とアフィン型

on Jun 1

$$A_2: \textcircled{1} - \textcircled{1}$$

$$B_2: \textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$G_2: \textcircled{1} \equiv \textcircled{3}$$

$$A_2^{(2)}: \textcircled{1} \overset{4}{-} \textcircled{4}$$

$$A_1^{(1)}: \textcircled{1} = \textcircled{1}$$



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
mathtod.online/@7shi/212328
 Cayleyの八元数体ネタ

Friday at 1:07pm

次の図は私独自の書き方における例外型 G_2 のDynkin図形。

$$G_2: \textcircled{1} \equiv \textcircled{3}$$

添付画像は

github.com/genkuroki/ClusterAl...

のp.15より。 G_2 型単純Lie代数は(本質的に八元数体の虚部である)7次元空間の一次変換で実現可能。Chevalley生成元の具体的な構成がそこに書いてあります。

G_2 型のコンパクトLie群は八元数体の自己同型群(D_4 型コンパクトLie群 $SO(8)$ の部分群になる)として実現されます。

実部には自明に作用。非自明なのは虚部への作用。

以上は A_1 型コンパクトLie群 $SU(2)$ と四元数体の関係と類似しています。

mathtod.online/media/v5uLpJ4sm...

$$\begin{aligned} f_1 &= E_{32} + E_{65}, & f_2 &= E_{21} + 2E_{43} + E_{54} + E_{76}, \\ h_1 &= E_{22} - E_{33} + E_{55} - E_{66}, & h_2 &= E_{11} - E_{22} + 2E_{33} - 2E_{55} + E_{66} - E_{77}. \end{aligned}$$

ここで E_{ij} は7次の行列単位である。 f_i が e_i の転置になっていないことに注意せよ。 e_1, e_2 に関する Serre 関係式は $e_1^2 = e_1 e_2 e_1 = e_2^3 = e_2^2 e_1 e_2^2 = 0$ からただちに得られ、 f_1, f_2 についても同様である。実際任意の定数 c_i に対して

$$\begin{aligned} c_0 e_1^2 e_2 + c_1 e_1 e_2 e_1 + c_2 e_2 e_1^2 &= 0, \\ c_0 e_2^4 e_1 + c_1 e_2^3 e_1 e_2 + c_2 e_2^2 e_1^2 e_2^2 + c_3 e_2 e_1 e_2^3 + c_4 e_1 e_2^4 &= 0. \end{aligned}$$

したがって q -Serre 関係式が成立することもわかるので量子展開環 $U_q(G_2)$ の上三角部分



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
 様々な対称性をシンプルに記述しているDynkin図形という名の「謎の図形」がありまして、Dynkin図形で分類される対称性が数学のあちこちに自然に出て来てしまう仕組みになっています。

Friday at 1:23pm

$SU(2)$ は四元数体に自己同型として作用しているのですが、 $SU(2)$ は A_1 型のコンパクト単純Lie群です。

八元数体で考えると、 $SU(2)$ よりずっと複雑な構造を持つ G_2 型のコンパクトLie群が出て来ます。その構成は G_2 型コンパクトLie群が D_4 型コンパクトLie群 $SO(8)$ の部分群と

して実現できることも示しています。

$$G_2: \textcircled{1} \equiv \textcircled{3}$$

$$D_4: \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{1} - \textcircled{1} \end{array}$$

D_4 を折りたたむと G_2 になる。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 1:36pm

ググって見つけたPDF(ざっと目を通したけどまじめに読んだわけではないので注意)

The Quaternions and the Spaces S^3 , $SU(2)$, $SO(3)$, and $\mathbb{R}P^3$
cis.upenn.edu/~cis610/geombcha...

Exceptional Lie groups
 Ichiro Yokota
arxiv.org/abs/0902.0431

私も例外群を真剣に扱ったことはないです。

でも、 G_2 だけはちょこっとだけ真剣に扱ったことがあります。

G_2 型の量子展開環の下三角部分に関するある基本的な定理の証明を実行したことがある。

すでに証明されていた A_2 , B_2 型の場合と合わせると任意のランク2の場合ができたことになり、そのことから任意のGCMの場合の定理が得られるという話。

その結果を使うと量子化されたある種の幾何クリスタルの「正値性」を示せます。 $q = 1$ の場合の結果が $q \neq 1$ の非可換な場合に拡張される。未出版。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 1:51pm

ディンキン図形が登場する最も易しい話はたぶんフリーズパターン(大雑把に言えばクラスター代数を数の計算に特殊化したもの)です。

割り算について習った直後の小3の子供に試しに計算させてみたら、 A_6 型のフリーズパターンを見事に作り上げました。

フリーズパターンについては次のリンク先のPDFファイルを見て下さい。

github.com/genkuroki/FriezePat...

フリーズパターンを例にディンキン図形の折りたたみ(folding)の有用性についても詳しく説明してあるし、例外型フリーズパターンにも触れているし、最も簡単なアフィン型フリーズパターンについても触れています。

ディンキン図形(より正確に言えばディンキン箆)に関係したリクリエーション数学としてフリーズパターンは結構優秀です。小学生でも遊べる。

百マス計算のような数学的につまらない単純計算をやらえる暇があったら、数学的に意味のある計算をやった方がいいと思う。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 1:58pm

というわけで、私はディンキン図形およびその拡大版が出て来る数学が大好きなのでした。

ディンキン図形の分類は「よく知られている無限系列以外に例外が有限個出て来る」という数学的に面白い分類パターンのひな形になっています。

分類結果が「よく知られているものだけしかない」になってしまうとちょっとさびしいわけですね。

数学的に最高に面白い分類結果になった例として、有限単純群の分類があります。よく知られているもの以外に26個の散在型有限単純群が発見され、人類の数学の世界に関する理解を大幅に豊かにしました。そういう予想外の新発見の価値は非常に高い。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 2:35pm

ディンキン図形の折りたたみは以下のように常微分演算子の世界でも自然に見ることができます。

演算子 A, B について、

・ $[A, B] = 0$ のとき A, B に対応する丸をを線で結ばない。

・ $[A, B] \neq 0$ かつ

$$\underbrace{[A, [\dots, [A, B] \dots]]}_{k+1} = 0,$$

$$[B, [B, A]] = 0$$

を満たしているとき、 A, B に対応する ①, ② を k 本線で結ぶ。

というルールで図を描くことにします。

以下、 $\partial = d/dx$ とします。

たとえば $A = \partial, B = x$ のとき

$$\textcircled{1} - \textcircled{1}$$

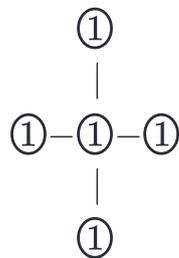
が描かれます。これは A_2 型ディンキン図形です。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

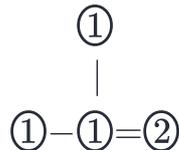
Friday at 2:45pm

$A = \partial, B_i = x - a_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) の場合には



と $D_4^{(1)}$ 型になります。中心が A に対応し、周囲が B_i に対応します。

B_i を2つ「合流」させて $A = \partial, B_1 = x - a, B_2 = x - b, B_3 = (x - c)^2$ とした場合には



と $B_3^{(1)}$ 型になる。

図形の名前の付け方については
[en.wikipedia.org/wiki/Dynkin_d...](https://en.wikipedia.org/wiki/Dynkin_diagram)

続く



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

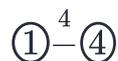
Friday at 2:55pm

3点を合流して、 $A = \partial, B_1 = x - a, B_2 = (x - b)^3$ の場合には



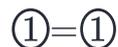
と $G_2^{(1)}$ 型になります。

4点をまとめて合流させると $A = \partial, B = x^4$ となり、



と $A_2^{(2)}$ 型になります。

$A_1^{(1)}$ 型図形は



なので、説明したルールの範囲内では作れないのですが、ルールを適切に拡張すると $A = \partial, B = \partial + x^2$ の場合にその図が描かれます。

$$\begin{aligned}
 [A, [A, [A, B]]] &= 0, \\
 [B, [B, [B, A]]] &= 0.
 \end{aligned}$$

交換子を何回繰り返したら 0 になるかで図を描くルールを適切に決める。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 3:03pm



Dynkin図形が絡んでくると表現論的な様々な道具が顔を出します。

たとえば以上のような演算子によるディンキン図形の表現から自然にWeyl群の量子化された(非可換な場合の)双有理作用を構成できます(これは私の研究の特殊な場合)。

Weyl群は置換群の一般化です。 A_{n-1} 型のWeyl群が n 次の置換群 S_n です。「謎の図形」の分だけ置換群の一般化が存在するわけです。だから、置換群も「ディンキン数学」の世界の住人です。

ディンキン図形のfoldingは演算子による表現は超幾何関数やパンルヴェ方程式の「合流」の手続きに似ています。もちろん関係があります。

ディンキン図形が出て来ると私は楽しい。(スイッチが入って延々と語り出してしまう。)

ディンキン図形のような「謎な図形」を延々と書き続けるのは楽しいです。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 8:37pm

対称化可能一般Cartan行列(GCM)の図示の仕方

GCM $A = [a_{ij}]$ と $D = \text{diag}(d_i)$ と対称行列 $DA = [\ell_{ij}]$ の例:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -2 & 2 & -2 & \\ & -1 & 2 & -3 \\ & & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \text{diag}(2, 1, 2, 3),$$

$$DA = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & \\ -2 & 2 & -2 & \\ & -2 & 4 & -6 \\ & & -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

$i \neq j$ のとき、 $(d_i), (d_j)$ を $-\ell_{ij}$ 重の線で結ぶ:

$$\textcircled{2} = \textcircled{1} = \overset{6}{\textcircled{2}} - \textcircled{3}$$

$\overset{6}{-}$ は6重の線。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Friday at 8:57pm

対称化可能一般Cartan行列(symmetrizable generalized Cartan matrix)は整数行列で

- ・対角成分がすべて2で非対角成分が非負であり、
- ・ある正の整数を対角成分とする対角行列が存在して、それを左からかけると対称行列になるもの

のことです。

対称化可能一般Cartan行列はKac-Moody代数や量子展開環を定義するときの基本データになっていて、昇降演算子の方法が特別にうまく行く対称性を定義するときの「遺伝子」の役割を果たしています。

対称化可能反対称整数行列も同様に定義でき、クラスター代数を定義するときの基本データになっています。

対称化可能反対称整数行列は、対称化可能一般Cartan行列を図示するときの $-l_{ij}$ 重線に向きを付けたもの(線を矢線にしたもの)で図示できます。要するに箭(quiver)です。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Saturday at 8:25am

ある種の図式で描ける(対称化可能)一般Cartan行列(GCM)というのがあって、対称性を記述するための基本データになっているという話をしました。

日本語でインターネット検索しても「ラングランズ」の語を数学ファンが使うようになってきているように見えるのですが、「ラングランズ双対」は一般Cartan行列のレベルで見たら単に行列としての転置を取る操作を意味しています。

一般Cartan行列のラングランズ双対はその転置としての得られる一般Cartan行列。

実際には一般Cartan行列の情報を膨らませたルート・データの双対を考えなければいけない場合が多いのですが、基本は一般Cartan行列の転置。

ルート・データまで膨らませると、 $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ と $SO(3) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ を区別できる。これらは最も簡単なLanglands双対群の例。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Saturday at 8:42am

$[(d/dz)^2 - Q(z)]u = 0$ 型の複素線形常微分方程式のモノドロミーは $SL(2, \mathbb{C})$ に含まれます。

しかし、その形の微分方程式を座標不変な枠組みで考えて、 $Q(z)$ がシュワルツ微分を含む座標変換性を満たすという設定にすると、シュワルツ微分の項のせいで、モノドロミーはスカラー行列倍の違いを無視して得られる群 $PSL(2, \mathbb{C})$ に含まれるとしなければいけなくなります。

モノドロミー表現の話なのでこれはGaloisサイドの数学。

Langlands双対性はGaloisサイドと保型サイドのあいだの謎の双対性のことです。

保型サイドは基本的に表現論サイド。上のケースに対応する保型サイドは、リーマン面上の臨界レベルにおける $SL(2, \mathbb{C})$ の対称性を持つ共形場理論です。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

Saturday at 8:57am

そこで出て来た $SL(2, \mathbb{C})$ と $PSL(2, \mathbb{C})$ がラングランズ双対群の最も簡単な例。

$SL(2, \mathbb{C})$ の対称性を持つ共形場理論に $PSL(2, \mathbb{C})$ が見えて来るのは $SL(2, \mathbb{C})$ に対応するW代数がVirasoro代数だから。

Virasoro代数の母関数である $T(z)$ の座標変換性にはシュワルツ微分が出て来る。だから $PSL(2, \mathbb{C})$ が出て来たように見える。

W代数とは数論におけるHecke環の共形場理論版。

(注意: ラングランズ対応で使うVirasoro代数は菅原構成で作ったものではない。W代数構成のVirasoro代数です。)



Nyoho @Nyoho

on Jun 1

@genkuroki お仕事の下書きにもつかっていただけてうれしいです!

Mathtodon からスイッチぽんで連続 toot を .tex ファイル形式で落としてくる機能も作成中です! (まだできていません)

mathtod.online powered by [Mastodon](#)